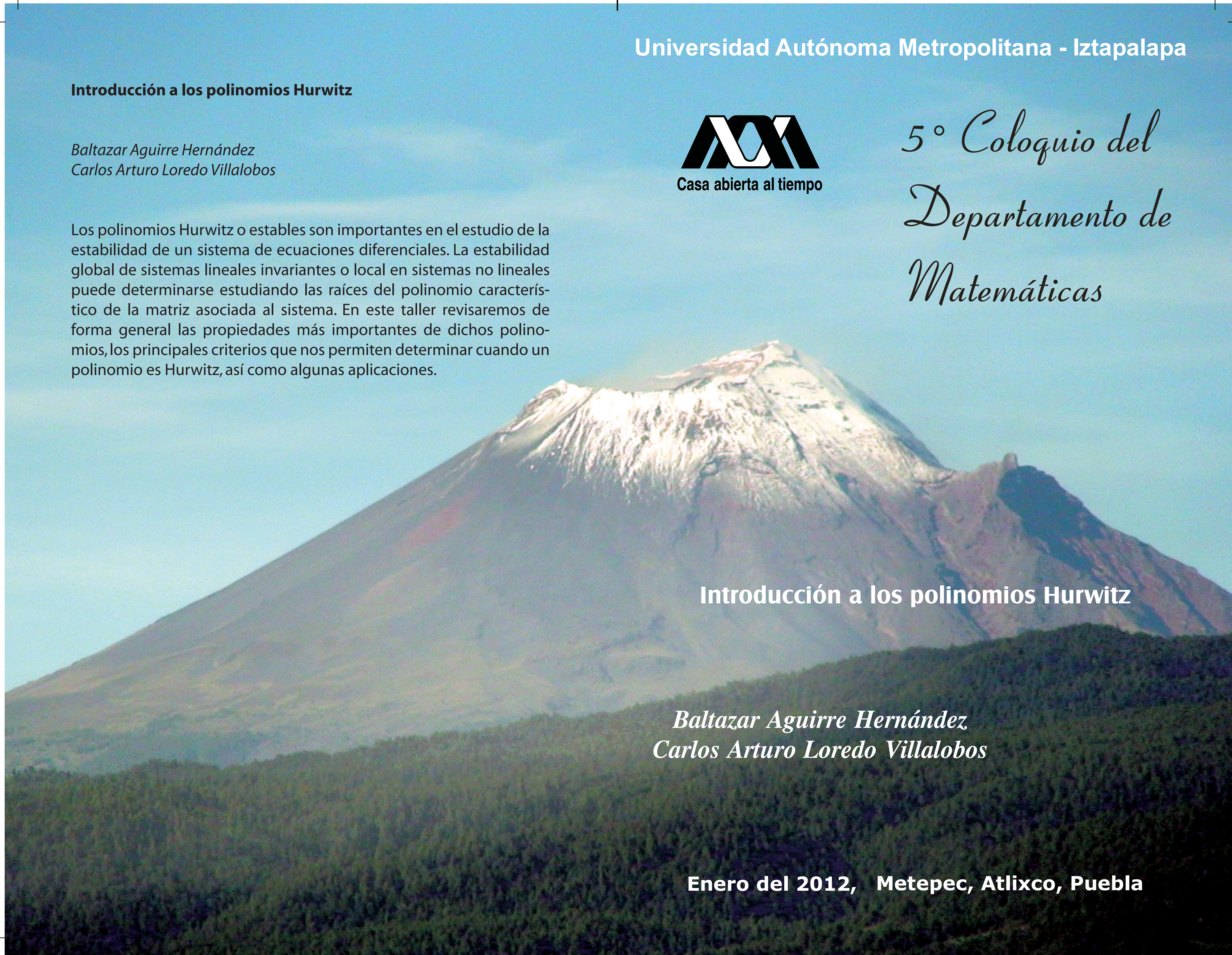

Introducción a los polinomios Hurwitz

Baltazar Aguirre Hernández
Carlos Arturo Loredo Villalobos

Los polinomios Hurwitz o estables son importantes en el estudio de la estabilidad de un sistema de ecuaciones diferenciales. La estabilidad global de sistemas lineales invariantes o local en sistemas no lineales puede determinarse estudiando las raíces del polinomio característico de la matriz asociada al sistema. En este taller revisaremos de forma general las propiedades más importantes de dichos polinomios, los principales criterios que nos permiten determinar cuando un polinomio es Hurwitz, así como algunas aplicaciones.

Universidad Autónoma Metropolitana - Iztapalapa

Casa abierta al tiempo

5° Coloquio del Departamento de Matemáticas

Introducción a los polinomios Hurwitz

Baltazar Aguirre Hernández
Carlos Arturo Loredo Villalobos

Enero del 2012, Metepec, Atlixco, Puebla

5^{to} Coloquio del Departamento de Matemáticas

Introducción a la Estabilidad de Sistemas Lineales: un Enfoque con Polinomios Hurwitz

Dr. Baltazar Aguirre

M. en C. Carlos Loredo

Casa abierta al tiempo

Comité Organizador

Dr. Mario Pineda Ruelas
Dra. Blanca Rosa Pérez Salvador
Dr. Joaquín Delgado Fernández
Dr. Constancio Hernández García
Mat. Daniel Espinosa
Beatriz Arce Vargas (Apoyo logístico)

Material didáctico del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autonóma Metropolitana-Iztapalapa con el apoyo de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería.

Introducción a la Estabilidad de Sistemas Lineales: un Enfoque con Polinomios Hurwitz

Dr. Baltazar Aguirre

M. en C. Carlos Loredo

Departamento de Matemáticas, UAM-I

Casa abierta al tiempo

Universidad Autónoma Metropolitana

Contenido

Introducción

La estabilidad en el origen de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales $\dot{x} = Ax$, donde A es una matriz con entradas constantes, se determina estudiando los valores propios de la matriz A, lo que es equivalente a estudiar las raíces del polinomio característico de A. De esta manera se tiene que si las raíces del polinomio característico tienen parte real negativa, entonces el sistema $\dot{x} = Ax$ resulta estable. Por otra parte, por los trabajos que Liapunov presentó en 1892, en su artículo *Le problème général de la stabilité du mouvment*, se sabe que bajo ciertas condiciones la estabilidad local de un sistema no lineal $\dot{x} = Ax + g(x)$ está determinada por la estabilidad de la parte lineal $\dot{x} = Ax$.

Ahora bien, el problema de determinar la estabilidad en un sistema a partir del estudio de las raíces del polinomio característico de A:

$$p(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n \qquad (a_0 \neq 0)$$

asociado al sistema lineal, se traduce en la tarea de encontrar condiciones necesarias y suficientes para las cuales todas las raíces de una ecuación algebraica se localicen en la mitad izquierda del plano.

Este problema fue formulado por primera vez en 1868 por Maxwell, quién obtuvo una solución para $n = 3$. En 1877, Routh dio una solución más general a este problema. Su solución fue un algoritmo, en el cual fueron formuladas condiciones explícitas para $n = 4$ y $n = 5$. La solución propiamente analítica fue obtenida por Hurwitz [**4**] en 1895. El algoritmo de Routh y el criterio de Hurwitz son equivalentes, aunque son diferentes en la forma. Las condiciones establecidas por Routh y por Hurwitz son conocidas en nuestros días como el *Criterio de Routh-Hurwitz*. Es interesante mencionar que los trabajos de Maxwell en esta área fueron resultado de sus investigaciones sobre reguladores mecánicos, mientras que Hurwitz, como matemático, se involucró con este problema porque el profesor A. Stodola lo invitó a resolverlo. Sin embargo, el problema propuesto por Maxwell ya había sido resuelto en escencia por el matemático francés Hermite en 1856, en su artículo *Sur le nombre des racines d'une équation algébrique comprise entre des limites donnés*, donde estableció una conexión cercana entre el número de raíces de un polinomio complejo en un plano y la signatura de una cierta forma cuadrática. Pero los trabajos de Hermite no habían sido llevados a un nivel en el cual pudieran ser usados por especialistas aplicados y por lo tanto su artículo no recibió ningún reconocimiento. Un nuevo criterio de estabilidad fue elaborado en 1914 por los matemáticos franceses Liénard y Chipart. Ellos usaron una forma cuadrática especial para obtener su resultado, el cual posee una ventaja sobre el criterio de Routh-Hurwitz.

En estas notas presentamos algunos de los diferentes criterios que existen para verificar cuándo las raíces de un polinomio tienen parte real negativa. Además, junto con el desarrollo de la teoría, presentamos ejemplos sencillos y algunas aplicaciones que aparecen en sistemas físicos. Este trabajo fue motivado por el curso Temas Selectos de Matemáticas Aplicadas I, impartido por el Dr. Baltazar Aguirre del Departamento de Matemáticas de la UAM-I en el trimestre 03-I. Los detalles de la mayoría de los resultados aquí expuestos pueden consultarse en [**9**].

Capítulo 1

Polinomios Hurwitz de grado pequeño

DEFINICIÓN 1.1. Decimos que un polinomio de coeficientes reales es Hurwitz si todas sus raíces tienen parte real negativa, *i.e.*, están en $\mathbb{C}^- = \{\, a + ib : a, b \in \mathbb{R} \text{ y } a < 0 \,\}$.

EJEMPLO 1.2.

(1) $p(t) = t^2 + 3t + 2$ es Hurwitz pues $p(t) = (t+2)(t+1)$ y $t = -2$ y $t = -1$ son sus raíces.
(2) $q(t) = t^2 + 2t + 2$ es Hurwitz pues $q(t) = (t+1+i)(t+1-i)$ y $t = -1-i$ y $t = -1+i$ son sus raíces.
(3) $s(t) = t^3 + t^2 + t + 1$ no es Hurwitz, ya que

$$s(t) = t^2(t+1) + t + 1 = (t^2+1)(t+1)$$

y sus raíces son $t = i,\ t = -i,\ t = 1$.

TEOREMA 1.3. *El polinomio $p(t) = t + a_1$ es Hurwitz si y sólo si $a_1 > 0$.*

TEOREMA 1.4. *El polinomio $p(t) = t^2 + a_1 t + a_2$ es Hurwitz si y sólo si $a_1 > 0$ y $a_2 > 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema fundamental del álgebra

$$p(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2), \quad \lambda_i \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \quad p(t) = t^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)t + \lambda_1\lambda_2 = t^2 + a_1 t + a_2$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2),\ a_2 = \lambda_1\lambda_2$$

Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y si $p(t)$ es Hurwitz entonces $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 < 0$. Entonces tenemos que

$$\lambda_1 + \lambda_2 < 0 \ \text{ y } \ \lambda_1\lambda_2 > 0$$

es decir

$$a_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2) > 0 \ \text{ y } \ a_2 = \lambda_1\lambda_2 > 0$$

Supongamos ahora que $a_1, a_2 > 0$. Como $a_2 = \lambda_1\lambda_2$ entonces λ_1 y λ_2 son del mismo signo y como $a_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2)$ y $a_1 > 0$ entonces

$\lambda_1 + \lambda_2 < 0$. Por lo que $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 < 0$ y entonces $p(t)$ es Hurwitz.
Si $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ y $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ con $\beta \neq 0$, entonces

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2\alpha, \qquad \lambda_1\lambda_2 = \alpha^2 + \beta^2$$

$$\Rightarrow \qquad a_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2) = -2\alpha, \qquad a_2 = \lambda_1\lambda_2 = \alpha^2 + \beta^2$$

si $p(t)$ es Hurwitz entonces $\alpha < 0$. Entonces $-2\alpha > 0$ y por lo tanto $a_1 = -2\alpha > 0$ y también se cumple que $a_2 = \alpha^2 + \beta^2 > 0$.
Ahora supongamos que $a_1 > 0$ y $a_2 > 0$ entonces como $a_1 = -2\alpha > 0$ se tiene que $\alpha < 0$. Por lo tanto $p(t)$ es Hurwitz. □

COROLARIO 1.5.

a) *$f(t) = b_0 t + b_1$ es Hurwitz si y sólo si b_0, b_1 son del mismo signo.*
b) *$p(t) = a_0 t^2 + a_1 t + a_2$ es Hurwitz si y sólo si a_0, a_1, a_2 son del mismo signo.*

TEOREMA 1.6. *Si $p(t)$ es un polinomio Hurwitz de grado n entonces todos sus coeficientes son del mismo signo.*

TEOREMA 1.7. *El polinomio $p(t) = t^3 + a_1 t^2 + a_2 t + a_3$ es Hurwitz si y sólo si a_1, a_2, $a_3 > 0$ y $a_1 a_2 - a_3 > 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema fundamental del álgebra

$$p(t) = (t + \alpha)(t^2 + \beta t + \gamma) = t^3 + (\alpha\beta)t^2 + (\alpha\beta + \gamma)t + \alpha\gamma$$

igualando

$$a_1 = \alpha + \beta, \qquad a_2 = \alpha\beta + \gamma, \qquad a_3 = \alpha\gamma$$

$\Rightarrow$): supongamos que $p(t)$ es Hurwitz. Por el teorema 1.6, a_1, a_2, $a_3 > 0$.
Falta probar que $a_1 a_2 - a_3 > 0$. Entonces

$$a_1 a_2 - a_3 = (\alpha+\beta)(\alpha\beta+\gamma) - \alpha\gamma = \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha\gamma + \beta\gamma - \alpha\gamma = \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta\gamma$$

Ahora $p(t) = (t + \alpha)(t^2 + \beta t + \gamma)$ es Hurwitz por lo tanto todos sus coeficientes son del mismo signo. Luego en el factor $(t + \alpha)$ se tiene que $\alpha > 0$ pues en caso contrario $p(t)$ no sería Hurwitz . Por lo tanto α, β, $\gamma > 0$. Entonces el producto $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta\gamma > 0$. Así $a_1 a_2 - a_3 > 0$.
$\Leftarrow$): supongamos que a_1, a_2, $a_3 > 0$ y que $a_1 a_2 - a_3 > 0$. Entonces

$$\alpha + \beta > 0, \qquad \alpha\beta + \gamma > 0, \qquad \alpha\gamma > 0, \qquad \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta\gamma > 0$$

De la 'ultima condición $\beta(\alpha^2 + \alpha\beta + \gamma > 0)$. Como $\alpha\beta + \gamma > 0$ entonces $\alpha^2 + \alpha\beta + \gamma > 0$. Por lo tanto $\beta > 0$. Como $\alpha\gamma > 0$ entonces α, $\gamma < 0$ ó α, $\gamma > 0$. Ahora $\alpha\beta + \gamma > 0$ y $\beta > 0$, entonces no puede ser que α y γ sean negativos al mismo tiempo. Así α, $\gamma > 0$. Entonces $(t + \alpha)$ y $(t^2 + \beta t + \gamma)$ son Hurwitz. Por lo tanto $p(t)$ es Hurwitz. □

TEOREMA 1.8. *El polinomio $p(t) = t^4 + a_1 t^3 + a_2 t^2 + a_3 t + a_4$ es Hurwitz si y sólo si a_1, a_2, a_3, $a_4 > 0$ y $a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 > 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema fundamental del álgebra

$$\begin{aligned} f(t) &= (t^2+\alpha t+\beta)(t^2+\gamma t+\delta) \\ &= t^4+(\alpha+\gamma)t^3+(\beta+\alpha\gamma+\delta)t^2+(\beta\gamma+\alpha\delta)t+\beta\delta \end{aligned}$$

igualando tenemos

$$a_1=\alpha+\gamma, \qquad a_2=\beta+\alpha\gamma+\delta, \qquad a_3=\beta\gamma+\alpha\delta, \qquad a_4=\beta\delta$$

$$a_1a_2a_3-a_3^2-a_1^2a_4=\alpha\gamma\left[(\beta-\delta)^2+(\alpha+\gamma)(\beta\gamma+\alpha\delta)\right]$$

$\Rightarrow$): Supongamos que f es Hurwitz entonces $t^2+\alpha t+\beta$ y $t^2+\gamma t+\delta$ son Hurwitz. Entonces por el teorema 1.6 α, β, γ, $\delta>0$. Se sigue entonces que a_1, a_2, a_3, $a_4>0$ y $a_1a_2a_3-a_3^2-a_1^2a_4>0$.
$\Leftarrow$): Supongamos que a_1, a_2, a_3, $a_4>0$ y $a_1a_2a_3-a_3^2-a_1^2a_4>0$. Entonces

$$\alpha+\gamma>0, \qquad \beta+\alpha\gamma+\delta>0, \qquad \beta\gamma+\alpha\delta>0, \qquad \beta\delta>0$$

$$\alpha\gamma\left[(\beta-\delta)^2+(\alpha+\gamma)(\beta\gamma+\alpha\delta)\right]>0$$

Como $\alpha+\gamma>0$ y $\beta\gamma+\alpha\delta>0$ entonces

$$(\beta-\delta)^2+(\alpha+\gamma)(\beta\gamma+\alpha\delta)>0$$

y como

$$\alpha\gamma\left[(\beta-\delta)^2+(\alpha+\gamma)(\beta\gamma+\alpha\delta)\right]>0$$

entonces $\alpha\gamma>0$. Por lo tanto α y γ tienen el mismo signo. Pero α y γ no pueden ser negativos pues $\alpha+\gamma>0$. Así $\alpha>0$ y $\gamma>0$. Por otra parte como $\beta\delta>0$ entonces β y δ son del mismo signo. No puede ocurrir que β y δ sean negativas pues sabemos $\alpha>0$ y $\gamma>0$ y por lo tanto no se cumpliría que $\beta\gamma+\alpha\delta>0$. Por lo tanto $\beta>0$ y $\delta>0$. Entonces $t^2+\alpha t+\beta$ y $t^2+\gamma t+\delta$ son Hurwitz. Entonces $f(t)$ es Hurwitz pues es el producto de estos polinomios. □

COROLARIO 1.9.

a) *$p(t)=a_0t^3+a_1t^2+a_2t+a_3$ es Hurwitz si y sólo si a_0, a_1, a_2, a_3 son del mismo signo y $a_1a_2-a_3a_0>0$.*
b) *$p(t)=a_0t^4+a_1t^3+a_2t^2+a_3t+a_4$ es Hurwitz si y sólo si a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 son del mismo signo y $\frac{a_1a_2a_3-a_3^2a_0-a_1^2a_4}{a_0}>0$.*

1.1. Aplicaciones

A continuación mostraremos algunas aplicaciones.

APLICACIÓN 1.10 (Oscilador armónico amortiguado).
Considérese una masa m sujeta a un extremo de un resorte. Supóngase que estiramos el resorte una cierta distancia y luego lo soltamos. El

movimiento que describe la masa (junto con el resorte) está descrito por la ecuación

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\beta\frac{dx}{dt}+kx=0$$

donde β es la constante de amortiguamiento y k es la constante del resorte, además $\beta > 0$ y $k > 0$. La ecuación característica de la ecuación diferencial es

$$p(\lambda)=m\lambda^2+\beta\lambda+k=0$$

Cómo m, β, $k > 0$ entonces $p(\lambda)$ es Hurwitz. Además

(1) si λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}^-$ entonces $x(t)=Ae^{\lambda_1 t}+Be^{\lambda_2 t}$.
(2) si $\lambda_1=\alpha+i\beta$ y $\lambda_2=\alpha-i\beta$, con $\alpha<0$, entonces $x(t)=Ae^{\alpha t}\cos\beta t+Be^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t$.

Luego cualquier solución $x(t)$ cumple que $x(t)\to 0$ si $t\to\infty$.

Aplicación 1.11 (Circuitos eléctricos).
La variación del voltaje en un tiempo t para un circuito eléctrico puede modelarse mediante la ecuación diferencial

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{c}i=\frac{dE}{dt}$$

donde E es el voltaje (medido en volts), R la resistencia (medida en Ohms), L la inductancia (medida en Henrios) y C la capacitancia (medida en Faradios). Si E es constante entonces

$$\frac{dE}{dt}=0$$

Bajo la suposición de que E es constante, la ecuación característica es

$$p(\lambda)=L\lambda^2+R\lambda+\frac{1}{c}=0$$

Luego $p(\lambda)$ es Hurwitz. Por lo tanto podemos asegurar que $i(t)\to 0$ cuando $t\to\infty$. Una explicación física de esto es que $i(t)\to 0$ cuando $t\to\infty$ debido al consumo de energía de la resistencia.

Aplicación 1.12 (Modelo Lotka-Volterra de 2 especies).
El modelo está expresado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\dot{x}&=x(2-3x+y)\\ \dot{y}&=y(1+2x-3y)\end{aligned}$$

$(0,0)$ y $(1,1)$ son los puntos críticos. La matriz Jacobiana en $(1,1)$ es

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$$

el polinomio característico es $p_A(\lambda)=\lambda^2+6\lambda+7$ el cual es Hurwitz. Por lo tanto cerca del punto $(1,1)$ las soluciones convergen.

Aplicación 1.13. Las ecuaciones diferenciales que describen la variación de voltaje de un circuito eléctrico con dos corrientes i_1, i_2 son

$$L\frac{d^2 i_2}{dt^2} + R\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C}(i_2 - i_1) = 0$$

$$\frac{d^3 i_2}{dt^3} + \frac{R}{L}\frac{d^2 i_2}{dt^2} + \frac{2}{LC}\frac{di_2}{dt} + \frac{R}{L^2C}i_2 = \frac{1}{L^2C}\frac{dE}{dt}$$

Si E es constante entonces $dE/dt = 0$. La ecuación característica es

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \frac{R}{L}\lambda^2 + \frac{2}{LC}\lambda + \frac{R}{L^2C}$$

luego, éste polinomio es Hurwitz pues los coeficientes son positivos y

$$\left(\frac{R}{L}\right)\left(\frac{2}{LC}\right) - \left(\frac{R}{L^2C}\right) = \frac{R}{L^2C} > 0$$

Por lo tanto $i_2(t) \to 0$, cuando $t \to \infty$, debido al consumo de energía de la resistencia.

Aplicación 1.14 (Sistema de Lorenz).
El sistema es el siguiente

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned}$$

con $\sigma, r, b > 0$. El punto $(0,0,0)$ es un punto crítico. La matriz Jacobiana en $(0,0,0)$ es

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

El polinomio característico es

$$p_A(\lambda) = \lambda^3 + [b + (1+\sigma)]\lambda^2 + [\sigma(1-r) + b(1+\sigma)]\lambda + b(1-r)\sigma$$

Si $r < 1$ entonces

$$b + (1+\sigma) > 0, \qquad \sigma(1-r) + b(1+\sigma) > 0, \qquad b(1-r)\sigma > 0$$

además

$$[b+(1+\sigma)][\sigma(1-r)+b(1+\sigma)] - b(1-r)\sigma = (1+\sigma)[b^2+\sigma(1-r)+b(1+\sigma)] > 0$$

por lo tanto $p_A(\lambda)$ es Hurwitz y $(0,0,0)$ es punto estable localmente.

Capítulo 2

Condiciones necesarias

En esta sección damos algunas condiciones necesarias para que un polinomio sea Hurwitz. Dichas condiciones se establecen para polinomios de grado arbitrario n.

Primero retomemos el resultado del teorema 1.3 del capítulo anterior, es decir, dado un polinomio Hurwitz $p(t)$ se debe tener que sus coeficientes son del mismo signo. Esto nos da un criterio para determinar cuando un polinomio no es Hurwitz, lo cual establecemos en la siguiente observación.

OBSERVACIÓN 2.1. Si los coeficientes de un polinomio $p(t)$ no tienen el mismo signo entonces $p(t)$ no es Hurwitz.

EJEMPLO 2.2. (1) $p(t) = 3t^6 + 5t^5 - 3t^4 + t^3 + 2t^2 + 3t + 6$ no es Hurwitz.
(2) $p(t) = -2t^7 + 3t^6 - 2t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$ no es Hurwitz.

TEOREMA 2.3. *Si* $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ *es Hurwitz y* $\xi \in \mathbb{C}$ *se tiene que*

a) *si* $\operatorname{Re}\xi > 0$ *entonces* $|f(\xi)| > |f(-\xi)|$
b) *si* $\operatorname{Re}\xi = 0$ *entonces* $|f(\xi)| = |f(-\xi)|$
c) *si* $\operatorname{Re}\xi < 0$ *entonces* $|f(\xi)| < |f(-\xi)|$

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema fundamental del álgebra se puede escribir

$$f(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n) \qquad \alpha_i \in \mathbb{C}^-$$

tenemos dos casos:
i) Si $\alpha_k \in \mathbb{R}^-$ ($\alpha_k < 0$), tomemos $\xi = a + ib$, luego

$$|\xi - \alpha_k| < |-\xi - \alpha_k|$$
$$\Leftrightarrow |\xi - \alpha_k|^2 > |-\xi - \alpha_k|^2$$
$$\Leftrightarrow |a + ib - \alpha_k|^2 > |-a - ib - \alpha_k|^2$$
$$\Leftrightarrow (a - \alpha_k)^2 + b^2 > (a + \alpha_k)^2 + b^2$$
$$\Leftrightarrow (a - \alpha_k)^2 - (a + \alpha_k)^2 > 0 \Leftrightarrow (-2\alpha_k)(2a) > 0 \Leftrightarrow a > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}\xi > 0$$

Análogamente si $\operatorname{Re}\xi = 0$ entonces $|\xi - \alpha_k| = |-\xi - \alpha_k|$ y si $\operatorname{Re}\xi < 0$ entonces $|\xi - \alpha_k| < |-\xi - \alpha_k|$
ii) pares de raíces conjugadas, tomamos

$$\alpha_r = \gamma + i\delta, \qquad \alpha_s = \gamma - i\delta, \qquad \gamma > 0,\ \delta > 0$$

(no olvidar que $\alpha_i \in \mathbb{C}^-$). Entonces

$$\begin{aligned} |\xi - \alpha_r|^2 &= |a + ib - \gamma - i\delta| \\ &= (a-\gamma)^2 + (b-\delta)^2 \\ |\xi - \alpha_s|^2 &= |a + ib - \gamma + i\delta| \\ &= (a-\gamma)^2 + (b+\delta)^2 \end{aligned}$$

Similarmente

$$|-\xi - \alpha_r|^2 = (a+\gamma)^2 + (b+\delta)^2$$

$$|-\xi - \alpha_s|^2 = (a+\gamma)^2 + (b-\delta)^2$$

Ahora

$$|\xi-\alpha_r|^2|\xi-\alpha_s|^2 = (a-\gamma)^4 + (a-\gamma)^2[(b-\delta)^2+(b+\delta)^2] + (b-\delta)^2(b+\delta)^2$$

$$|-\xi-\alpha_r|^2|-\xi-\alpha_s|^2 = (a+\gamma)^4 + (a+\gamma)^2[(b-\delta)^2+(b+\delta)^2] + (b-\delta)^2(b+\delta)^2$$

$$\Rightarrow |\xi-\alpha_r|^2|\xi-\alpha_s|^2 > |-\xi-\alpha_r|^2|-\xi-\alpha_s|^2$$

$$\Leftrightarrow (a-\gamma)^4 + (a-\gamma)^2[(b-\delta)^2+(b+\delta)^2] > (a+\gamma)^4 + (a+\gamma)^2[(b-\delta)^2+(b+\delta)^2]$$

Por otra parte

$$(a-\gamma)^2 > (a+\gamma)^2 \Leftrightarrow (a-\gamma)^2 - (a+\gamma)^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow (-2\gamma)(2a) > 0 \Leftrightarrow a > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}\xi > 0$$

Por lo tanto si $\operatorname{Re}\xi > 0$ entonces

$$(a-\gamma)^2 > (a+\gamma)^2 \ \text{ y } \ (a-\gamma)^4 > (a+\gamma)^4$$

Entonces

$$|\xi-\alpha_r||\xi-\alpha_s| > |-\xi-\alpha_r||-\xi-\alpha_s|$$

Análogamente, si $\operatorname{Re}\xi = 0$ entonces $|\xi-\alpha_r||\xi-\alpha_s| = |-\xi-\alpha_r||-\xi-\alpha_s|$ y si $\operatorname{Re}\xi < 0$ entonces $|\xi-\alpha_r||\xi-\alpha_s| < |-\xi-\alpha_r||-\xi-\alpha_s|$.
Por lo tanto los incisos a), b) y c) se cumplen. □

Observación 2.4. Si $f(x)$ es un polinomio real tal que no se cumple alguno de los incisos a), b) ó c) entonces $f(x)$ no es Hurwitz.

EJEMPLO 2.5. Sea $f(x) = x^3 + 3x^2 + 16x + 130$, tomar $\xi = 1 + 5i$. Entonces

$$\begin{aligned}
f(\xi) &= (1+5i)^3 + 3(1+5i)^2 + 16(1+5i) + 130 \\
&= 1 + 3(5i) + 3(5i)^2 + 125(i^3) + 3(1 + 10i + 25i^2) + 16 + 80i + 130 \\
&= 1 - 75 + 15i - 125i + 3 - 75 + 30i + 16 + 130 + 80i \\
&= 0
\end{aligned}$$

Luego $|f(\xi)| = 0$; por otro lado

$$\begin{aligned}
f(-\xi) &= (-1-5i)^3 + 3(-1-5i)^2 + 16(-1-5i) + 130 \\
&= -1 + 3(5i) - 3(-5i)^2 + (-5i)^3 + 3(1 + 10i - 25) - 16 - 80i + 130 \\
&= -1 + 75 - 15i + 125i + 3 - 75 + 30i - 16 + 130 - 8i \\
&= 116 + 60i
\end{aligned}$$

Luego $|f(-\xi)| > 0$. Entonces no se cumple $|f(\xi)| > |f(-\xi)|$. Por lo tanto $f(x)$ no es Hurwitz.

Capítulo 3

Criterio de Routh-Hurwtiz

Al final del siglo XIX el ingeniero austriaco A. Stodola, el descubridor de la teoría del vapor y las turbinas de gas, sin conocer los trabajos de Routh, propuso el problema de encontrar condiciones bajo las cuales todas las raíces de una ecuación algebraica tuvieran parte real negativa. En 1895, A. Hurwitz en base a los trabajos de Hermite dio una solución al problema (independiente de la dada por Routh).

DEFINICIÓN 3.1 (Matriz de Hurwitz). Dado el polinomio

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

denotamos por $H(f)$ a la matriz de Hurwitz de f, la cual queda definida como

$$H(f) = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

A continuación presentamos el resultado más importante de la presente sección.

TEOREMA 3.2 (Criterio de Routh-Hurwitz). *Sea*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

con $a_0 > 0$*,* $f(x)$ *es Hurwitz si y solo si* $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$*, donde* $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ *son los menores principales diagonales de H(f), es decir*

$$\Delta_1 = \det(a_1),\ \Delta_2 = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{pmatrix},\ \Delta_3 = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}, \ldots$$

EJEMPLO 3.3. Verifiquemos si el polinomio $f(t) = t^5 + 7t^4 + 19t^3 + 25t^2 + 16t + 4$ es Hurwitz.

Solución. Hacemos

$$a_0 = 1,\ a_1 = 7,\ a_2 = 19,\ a_3 = 25,\ a_4 = 16,\ a_5 = 4$$

y construimos la matriz de Hurwitz de f

$$H(f) = \begin{pmatrix} 7 & 25 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 19 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 25 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 19 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 25 & 4 \end{pmatrix}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= 7 > 0 \\
\Delta_2 &= 7(19) - 25 > 0 \\
\Delta_3 &= 25[7(19) - 25] - 7[7(16) - 4] = 2700 - 756 > 0 \\
\Delta_4 &= 16[2700] - 19[4(7(19) - 25) - 7(0)] + [4(7(16) - 4) - 25(0)] \\
&= 43200 - 8208 + 432 > 0 \\
\Delta_5 &= 4\Delta_4 > 0
\end{aligned}$$

Por el Teorema 3.2, f es Hurwitz.

Ahora que tenemos un criterio para determinar si un polinomio de grado arbitrario es Hurwitz, podemos ilustrar su importancia en el estudio de la estabilidad de sistemas de ecuaciones diferenciales.

APLICACIÓN 3.4. Considérese el sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{x} = Ax$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}$$

puede demostrarse que el polinomio característico de A, $p_A(t)$, está dado por $p_A(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} + \ldots + a_n$. Si $p_A(t)$ es Hurwitz entonces el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable. Y el hecho de que $p_A(t)$ sea o no sea Hurwitz podemos determinarlo utilizando el Criterio de Routh-Hurwitz. Debido a esto a los polinomios Hurwitz también se les conoce como polinomios estables.

Capítulo 4

Teorema de Hermite-Biehler

4.1. Teorema de la fase

DEFINICIÓN 4.1. Dado el polinomio con coeficientes reales $p(t)$ considerar $p(i\omega)$, $w \in \mathbb{R}$; $p(i\omega) = \alpha(\omega) + i\beta(\omega)$ determina una curva en el plano complejo:

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ \omega &\mapsto \alpha(\omega) + i\beta(\omega) \end{aligned}$$

Al argumento de $p(i\omega)$, $\arg p(i\omega)$, lo llamamos la fase de $p(i\omega)$.

EJEMPLO 4.2.

(1) $p(t) = t^2 + 5t + 3$

$$p(i\omega) = (iw)^2 + 5i\omega + 3 = 3 - w^2 + i(5w)$$

(2) $p(t) = 5t^3 + 6t^2 - 7t - 2$

$$p(i\omega) = -2 - 6\omega^2 + i(-7\omega - 5\omega^3)$$

TEOREMA 4.3 (de la fase). *Si $p(t)$ es un polinomio Hurwitz de grado n, entonces $\arg p(i\omega)$ es una función estrictamente creciente de la variable ω sobre $(-\infty, +\infty)$. Además el cambio neto en la fase de $-\infty$ a $+\infty$ es*

$$\arg[p(+i\infty)] - \arg[p(-i\infty)]^1 = n\pi$$

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema fundamental del álgebra

$$p(t) = a_n(t - a_1 - ib_1)(t - a_2 - ib_2)\cdots(t - a_n ib_n)$$

entonces

$$p(i\omega) = a_n[-a_1 + i(w - b_1)][-a_2 + i(w - b_2)]\cdots[-a_n + i(w - b_n)]$$

luego calculamos la fase de $p(i\omega)$

$$\begin{aligned} \arg p(i\omega) &= \arg(a_n) + \arg[-a_1 + i(\omega - b_1)] + \ldots + \arg[-a_n + i(\omega - b_n)] \\ &= \arg(a_n) + \arctan\left(\frac{\omega - b_1}{-a_1}\right) + \ldots + \arctan\left(\frac{\omega - b_n}{-a_n}\right) \end{aligned}$$

[1] $\arg[p(\pm i\infty)]$ significa el $\lim\limits_{\omega\to\pm\infty} \arg\ p(i\omega)$

Ahora

$$\frac{d}{d\omega}\left[\arg p(i\omega)\right] = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega-b_1}{-a_1}\right)^2}\left(-\frac{1}{a_1}\right) + \ldots + \frac{1}{1+\left(\frac{\omega-b_n}{-a_n}\right)^2}\left(-\frac{1}{a_n}\right)$$

y para todo $k = 1,\ldots,n$ se tiene que $a_k < 0$, pues $a_k + ib_k$ es raíz de $p(t)$ que es Hurwitz. Por lo tanto $\arg p(i\omega)$ es una función creciente de ω. Ahora

$$\lim_{\omega\to+\infty} \arg p(i\omega) = \arg(a_n) + \frac{\pi}{2} + \ldots + \frac{\pi}{2} = \arg(a_n) + \frac{n\pi}{2}$$

$$\lim_{\omega\to-\infty} \arg p(i\omega) = \arg(a_n) - \frac{\pi}{2} - \ldots - \frac{\pi}{2} = \arg(a_n) - \frac{n\pi}{2}$$

por lo tanto

$$\arg[p(+i\infty)] - \arg[p(-i\infty)] = n\pi$$

□

Ejemplo 4.4. Determinaremos si es Hurwitz el polinomio $p(t) = t^3 + 3t^2 + 3$.
Solución. Calculamos $p(i\omega)$

$$p(i\omega) = (i\omega)^3 + 3(i\omega)^2 + (i\omega) + 3 = 3 - 3\omega^2 + i\omega(1-\omega^2)$$

entonces la fase de $p(i\omega)$ es

$$\arg p(i\omega) = \arctan\frac{\omega(1-\omega^2)}{3-3\omega^2} = \arctan\frac{\omega(1-\omega^2)}{3(1-\omega^2)} = \arctan\frac{\omega}{3}$$

luego

$$\lim_{\omega\to+\infty} \arg p(i\omega) = \lim_{\omega\to+\infty} \arctan\frac{\omega}{3} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\omega\to-\infty} \arg p(i\omega) = \lim_{\omega\to-\infty} \arctan\frac{\omega}{3} = -\frac{\pi}{2}$$

por lo tanto

$$\arg[p(+i\infty)] - \arg[p(-i\infty)] = \pi \neq 3\pi$$

Así, $p(t)$ no es Hurwitz [2].

[2]Puede verificarse que $\arg p(i\omega)$ es una función creciente, por lo que es necesario verificar también el cambio neto en la fase.

4.2. Teorema de la intersección de la frontera

Consideremos una familia de polinomios $P(\lambda, s)$ que satisfagan la siguiente condición:

HIPÓTESIS 4.5. *$P(\lambda, s)$ es una familia de polinomios*

(1) *de grado fijo n.*
(2) *continuos con respecto de la variable λ para $\lambda \in [a, b]$.*

EJEMPLO 4.6. Considérese

$$P(\lambda, t) = \lambda t^n + (\lambda + 2)t^{n-1} + \lambda t^{n-2} + \ldots + \begin{cases} \lambda + 2, & n \text{ par} \\ \lambda, & n \text{ impar} \end{cases}$$

Ahora

(1) con $\lambda \in [1, 2]$, $P(\lambda, t)$ es una familia que satisface la Hipótesis 4.5.
(2) con $\lambda \in [0, 3]$, $P(\lambda, t)$ es una familia que no satisface la hipótesis, pues para $\lambda = 0$ se tiene un polinomio de grado menor que n.

TEOREMA 4.7 (de la intersección de la frontera). *Si $P(\lambda, t)$ satisface la Hipótesis 4.5 y $P(a, t)$ tiene todas sus raíces en $\mathbb{C}^-$ ($P(a, t) \in \mathcal{H}$) y $P(b, t)$ tiene al menos una raíz en $\mathbb{C}^+$, entonces existe un n'umero $\rho \in (a, b]$ tal que*

a) *$P(\rho, t)$ tiene todas sus raíces en $\mathbb{C}^- \cup i\mathbb{R}$.*
b) *$P(\rho, t)$ tiene al menos una raíz en $i\mathbb{R}$.*

DEMOSTRACIÓN. Para probar este resultado introducimos el conjunto E de n'umeros reales r tales que $r \in (a, b]$ y que satisfacen la siguiente propiedad $\mathcal{P}$:

$$\forall\, r' \in (a, r),\ P(r', t) \text{ es Hurwitz}$$

El conjunto E es no vacío (puede probarse que el conjunto de polinomios Hurwitz de grado n es abierto). Sea $\rho = \sup E$. Este supremo existe pues E está acotado superiormente por b. Por ser ρ cota superior de E entonces para todo $r < \rho$, $P(r, t)$ tiene raíces en $\mathbb{C}^-$. Tomando el límite cuando $r \to \rho$ se tiene que las raíces de $P(\rho, t)$ estan en $\mathbb{C}^- \cup i\mathbb{R}$. Por lo tanto se cumple el inciso a).

Si $P(\rho, t)$ tuviera todas sus raíces en $\mathbb{C}^-$ entonces por el teorema **??** se puede encontrar un $\varepsilon > 0$ tal que si $\bar{r} \in [a, \rho + \varepsilon]$ entonces $P(\bar{r}, t)$ es Hurwitz. Por lo tanto ρ no sería el supremo. Por lo tanto $P(\rho, t)$ tiene al menos una raíz en $i\mathbb{R} = \partial\mathbb{C}^-$. Con lo anterior queda probado b). □

OBSERVACIÓN 4.8. El resultado es más general pues se puede tomar una partición de los complejos: $V \cup W \cup Z$, tal que V, Z son abiertos y $W = \partial V = \partial Z$, $V \cap Z = \varnothing$. Si $P(a, t)$ tiene todas sus raíces en V y $P(b, t)$ tiene al menos una raíz en Z entonces existe ρ tal que

a) $P(\rho, t)$ tiene sus raíces en $V \cup W$.
b) $P(\rho, t)$ tiene al menos una raíz en $W = \partial V$.

EJEMPLO 4.9. Sean $p(t) = t + 3$ y $q(t) = t - 2$. Considere la familia de polinomios

$$f(\lambda, t) = (1 - \lambda)(t + 3) + \lambda(t - 2), \text{ con } \lambda \in [0, 1]$$

Esta familia satisface la Hipótesis 4.5. Ahora

$$f(0, t) = t + 3 \text{ es Hurwitz}$$
$$f(1, t) = t - 2 \text{ no es Hurwitz}$$

Por el teorema de la intersección de la frontera, existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que

a) $f(\lambda, t)$ tiene todas sus raíces en $\mathbb{C}^- \cup i\mathbb{R}$. Tomemos por ejemplo $\lambda = 3/5$, entonces
$$f(3/5, t) = \frac{2}{5}(t + 3) + \frac{3}{5}(t - 2) = t$$
y su raíz es $0 \in (\mathbb{C}^- \cup i\mathbb{R})$.
b) $f(\lambda, t)$ tiene al menos una raíz en $i\mathbb{R}$. Seg'un el inciso a) basta con tomar $\lambda = 3/5$.

4.3. Principio de Exclusión del cero

TEOREMA 4.10 (Principio de exclusión del cero). *Supongamos que tenemos una familia $f(p, t)$ de polinomios tal que $p \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ donde Ω es arco-conexo. La familia es de grado constante y al menos hay un polinomio Hurwitz. Entonces toda la familia es Hurwitz si y sólo si $f(p, i\omega) \neq 0 \, \forall \, \omega \in \mathbb{R}$ y $\forall \, p \in \Omega$.*

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow$): Por el teorema de la fase.

$\Leftarrow$): Tomemos $f(q, t)$ un elemento arbitrario de la familia, probaremos que $f(q, t)$ es Hurwitz. Sabemos que existe al menos un elemento $f(q_0, t)$ que es un polinomio Hurwitz. Ya que Ω es arco-conexo existe una trayectoria contenida en Ω que une a q_0 con q. Sea $\gamma : [a, b] \to \Omega$ una parametrización de esta trayectoria, es decir $\gamma(a) = q_0$ y $\gamma(b) = q$. Consideremos la subfamilia: $f(\gamma(t), t) = p(\lambda, t)$. Asi $p(a, t) = f(q_0, t)$ es Hurwitz. Si $p(b, t) = f(q, t)$ no fuera Hurwitz entonces tendría una raíz en $i\mathbb{R}$ o en $\mathbb{C}^+$. Si $p(b, i\omega) = f(q, i\omega) = 0$ entonces hay una contradicción. Si $p(b, t)$ tiene una raíz en $\mathbb{C}^+$, entonces por el teorema de intersección de la frontera existe $\rho \in (a, b]$ tal que
(1) $p(\rho, t)$ tiene sus raíces en $\mathbb{C}^- \cup i\mathbb{R}$.
(2) al menos una raíz está en $i\mathbb{R}$

Por 2) existe ω_0 tal que $p(\rho, i\omega_0) = f(\gamma(\rho), i\omega_0) = 0$, pero ésto es una contradicción. Por lo tanto $p(b,t) = f(q,t)$ es Hurwitz para todo $q \in \Omega$.

$\square$

EJEMPLO 4.11. Dado $f(t) = t^3 + kt + 2t + 3$, $k > 0$, busquemos para qué valores de k resulta Hurwitz el polinomio.

Solución. Calculamos

$$f(i\omega) = -i\omega^3 - k\omega^2 + 2i\omega + 3 = (3 - k\omega^2) + i\omega(2 - \omega^2)$$

Luego $f(i\omega) = 0$ si y sólo si

$$3 - k\omega^2 = 0 \ \text{ y } \ \omega(2 - \omega^2) = 0$$

si y sólo si

$$k = \frac{3}{2} \ \text{ y } \ \omega^2 = 2 \ \text{ ó}\omega = 0$$

Entonces hay dos posibilidades:

a) $f(t)$ es Hurwitz $\forall\, k \in (0, 3/2)$;
b) $f(t)$ es Hurwitz $\forall\, k \in (3/2, \infty)$

Busquemos un k para el cual $f(t)$ sea Hurwitz, digamos $k = 2$: $f(t) = t^3 + 2t^2 + 2t + 3$. La matriz de Hurwitz de este polinomio es

$$H(f) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

y además

$$\Delta_1 = 2 > 0, \ \Delta_2 = 1 > 0, \ \Delta_3 = 3\Delta_3 > 0$$

Tenemos entonces un elemento de la familia que es Hurwitz ($k = 2$), entonces, por el principio de exclusión del cero $f(t) = t^3 + kt^2 + 2t + 3$ es Hurwitz para todo $k \in (3/2, \infty)$.

4.4. Teorema de Hermite-Biehler

DEFINICIÓN 4.12. Considerar el polinomio real $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$. Podemos escribir a $p(t)$ de la siguiente forma

$$p(t) = (a_0 + a_2 t^2 + a_4 t^4 + \ldots) + t(a_1 + a_3 t^2 + a_5 t^4 + \ldots)$$

al evaluar en $i\omega$

$$p(i\omega) = (a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \ldots) + i\omega(a_1 - a_3\omega^2 + a_5\omega^4 - \ldots)$$

Definimos

$$\begin{aligned} p^e(\omega) &= a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \ldots \\ p^o(\omega) &= a_1 - a_3\omega^2 + a_5\omega^4 - \ldots \\ p^{par}(t) &= a_0 + a_2 t^2 + a_4 t^4 + \ldots \\ p^{imp}(t) &= a_1 t + a_3 t^3 + a_5 t^5 + \ldots \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 4.13. Nótese que

$$p^{par}(i\omega) = p^{e}(\omega)$$

$$p^{imp}(i\omega) = i\omega p^{o}(\omega)$$

DEFINICIÓN 4.14. El polinomio $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$ satisface la propiedad de la alternancia si y sólo si

a) los coeficientes principales de $p^{par}(t)$ y $p^{imp}(t)$ tienen el mismo signo;
b) todas las raíces de $p^{e}(\omega)$ y $p^{o}(\omega)$ son reales y las raíces positivas de $p^{e}(\omega)$ y $p^{o}(\omega)$ se van alternando, es decir

$$0 < \omega_{e,1} < \omega_{o,1} < \omega_{e,2} < \omega_{o,2} < \ldots$$

TEOREMA 4.15 (Hermite-Biehler). *Un polinomio real $P(t)$ es Hurwitz si y sólo si satisface la propiedad de la alternancia.*

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow$): Como $P(t)$ es Hurwitz entonces todos sus coeficientes tienen el mismo signo, cumpliéndose así el inciso a) de la propiedad de la alternancia. Falta mostrar que se cumple el inciso b) de dicha propiedad. Sin pérdida de generalidad suponga que grado $(P) = 2m$ y que sus coeficientes son positivos, entonces

$$P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_{2m} t^{2m}$$

$$\Rightarrow \quad P(i\omega) = (a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 + \ldots + (-1)^m a_{2m}\omega^{2m}) + i\omega(a_1 - a_3\omega^2 + a_5\omega^4 + \ldots + (-1)^{m-1} a_{2m-1}\omega^{2m-1})$$

Por el teorema de la fase $\arg[P(i\omega)]$ es una función creciente en $\omega \in (-\infty, +\infty)$ y el cambio neto en la fase es $2m\pi$, que equivale a m vueltas en $\omega \in (-\infty, +\infty)$, o bien a $\frac{m}{2}$ vueltas en $\omega \in (0, +\infty)$. Para $\omega \in (0, +\infty)$ las raíces de $P^{e}(\omega)$ y $P^{o}(\omega)$ deben estar ordenadas de la siguiente manera:

$$0 < \omega_{e,1} < \omega_{o,1} < \omega_{e,2} < \omega_{o,2} < \ldots$$

Cuando da una vuelta pasa por dos raíces de $P^{e}(\omega)$ y también por dos raíces de $P^{o}(\omega)$. Como da $m/2$ vueltas pasa por m raíces de $P^{e}(\omega)$ y por m raíces de $P^{o}(\omega)$, estas son reales y positivas. Entonces

$$0 < \omega_{e,1} < \omega_{o,1} < \omega_{e,2} < \omega_{o,2} < \ldots < \omega_{o,m-1} < \omega_{e,m}$$

cumpliéndose así el inciso b) de la propiedad de la alternancia. Similarmente se cumple si grado$(P) = 2m + 1$.

$\Leftarrow$): Supongamos que $P(t)$ satisface las condiciones de la alternancia. Sin pérdida de generalidad supongamos que grado$(P) = 2m$ y que sus coeficientes son positivos. Entonces

$$P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_{2m} t^{2m}$$

$$P(i\omega) = P^e(\omega) + i\omega P^o(\omega)$$

donde

$$P^e(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 + \ldots + (-1)^m a_{2m}\omega^{2m}$$

$$P^o(\omega) = a_1 - a_3\omega^2 + a_5\omega^4 + \ldots + (-1)^{m-1} a_{2m-1}\omega^{2m-1}$$

Como se satisface la propiedad de la alternancia entonces

$$0 < \omega^P_{e,1} < \omega^P_{o,1} < \omega^P_{e,2} < \omega^P_{o,2} < \ldots < \omega^P_{o,m-1} < \omega^P_{e,m}$$

Tomemos ahora un polinomio Hurwitz arbitrario de grado $2m$, por ejemplo $f(t) = (t+1)^{2m}$, el cual escribimos como $f(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_{2m} t^{2m}$. Por la implicación que ya está demostrada, f satisface la propiedad de la alternancia, es decir:

$$0 < \omega^f_{e,1} < \omega^f_{o,1} < \omega^f_{e,2} < \omega^f_{o,2} < \ldots < \omega^f_{o,m-1} < \omega^f_{e,m}$$

Nótese que $f(i\omega)$ no tiene raíces imaginarias entonces para cualquier $\omega \in \mathbb{R}$ se tiene que $f(i\omega) \neq 0$. Tomemos ahora λ tal que $0 < \lambda < 1$, entonces

$$0 < \lambda\omega^P_{e,1} + (1-\lambda)\omega^f_{e,1} < \lambda\omega^P_{o,1} + (1-\lambda)\omega^f_{o,1} < \ldots < \lambda\omega^P_{e,m} + (1-\lambda)\omega^f_{e,m}$$

Definamos

$$g^{par}_\lambda(t) = [\lambda a_{2m} + (1-\lambda)b_{2m}][(\lambda\omega^P_{e,1} + (1-\lambda)\omega^f_{e,1})^2 + t^2]\cdots$$
$$\cdots[(\lambda\omega^P_{e,m} + (1-\lambda)\omega^f_{e,m})^2 + t^2]$$

$$g^{imp}_\lambda(t) = [\lambda a_{2m-1} + (1-\lambda)b_{2m-1}]t[(\lambda\omega^P_{o,1} + (1-\lambda)\omega^f_{o,1})^2 + t^2]\cdots$$
$$\cdots[(\lambda\omega^P_{o,m-1} + (1-\lambda)\omega^f_{o,m-1})^2 + t^2]$$

Considerar la familia de polinomios

$$g(\lambda, t) = g^{par}_\lambda(t) + g^{imp}_\lambda(t) \quad \text{con } \lambda \in [0,1]$$

Nótese que la familia es de grado constante. Ahora para $\lambda = 0$

$$g(0,s) = [(\omega^f_{e,1})^2 + t^2]\cdots[(\omega^f_{e,m})^2 + t^2] + t[(\omega^f_{o,1})^2 + t^2]\cdots[(\omega^f_{o,m-1})^2 + t^2]$$

$$g(0, i\omega) = f^e(\omega) + i\omega f^o(\omega)$$

Por lo tanto

$$g(0,t) = f(t)$$

Recordemos que f es Hurwitz, entonces la familia $g(\lambda, t)$ tiene al menos un elemento que es Hurwitz. Entonces por el principio de exclusión del cero todos los elementos de la familia son polinomios Hurwitz. En particular cuando $\lambda = 1$ se tiene que $g(1, t) = P(t)$.

□

EJEMPLO 4.16. Verificar si los siguientes polinomios son Hurwitz

(1) $p(t) = t^3 + 2t^2 + 5t + 3$.
Calculamos

$$p(i\omega) = 3 - 2\omega^2 + i\omega(5 - \omega^2)$$

$$p^e(\omega) = 3 - 2\omega^2, \quad p^o(\omega) = 5 - \omega^2$$

Ahora

$$p^{par}(t) = 3 + 2t^2, \quad p^{imp}(t) = 5t + t^3$$

Vemos que el inciso a) de la propiedad de la alternancia se satisface. Ahora, verificamos el inciso b)

$$p^e(\omega) = 0 \iff \omega = \pm\sqrt{3/2}$$

$$p^o(\omega) = 0 \iff \omega = \pm\sqrt{5}$$

Luego, $w_{e,1} = \sqrt{3/2}$ y $w_{o,1} = \sqrt{5}$. Entonces tenemos que $w_{e,1} < w_{o,1}$ satisfaciendose así el inciso b) de la propiedad de la alternancia. Por lo tanto por el teorema 4.15 tenemos que $p(t)$ es Hurwitz.

(2) $p(t) = t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 7t + 2$.
Tenemos que

$$p^{par}(t) = 2 + 3t^2 + t^4, \quad p^{imp}(t) = 7t + 2t^3$$

Por otra parte

$$p(i\omega) = 2 - 3\omega^2 + \omega^4 + i\omega(7 - 2\omega^2)$$

$$p^e(\omega) = 2 - 3\omega^2 + \omega^4, \quad p^o(\omega) = 7 - 2\omega^2$$

Luego

$$p^e(\omega) = 0 \iff \omega = \pm 1 \text{ ó } \omega = \pm\sqrt{2}$$

$$p^o(\omega) = 0 \iff \omega = \pm\sqrt{7/2}$$

Hacemos $\omega_{e,1} = 1$, $\omega_{e,2} = \sqrt{2}$, $\omega_{o,1} = \sqrt{7/2}$. Ahora $\omega_{e,1} < \omega_{o,1}$, pero $\omega_{o,1} > \omega_{e,2}$. Por lo tanto no se cumple el inciso b) de la propiedad de la alternancia. Por el teorema de Hermite-Biehler $p(t)$ no es Hurwitz.

4.4.1. Teorema de Leonhard-Mihailov.

TEOREMA 4.17 (Leonhard-Mihailov). *Sea $P(t)$ un polinomio de grado n. $P(t)$ es Hurwitz si y sólo si* $\arg[P(i\omega)]$ *(también conocida como la fase) es una función continua y estrictamente creciente en $\omega \in (-\infty, +\infty)$ y el cambio neto cumple* $\arg[P(+i\infty)] - \arg[P(-i\infty)] = n\pi$.

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow$): Teorema de la fase

$\Leftarrow$): Tenemos que

$$P(i\omega) = P^e(\omega) + i\omega P^o(\omega)$$

Sin pérdida de generalidad supóngase que los coeficientes de P son positivos. Como $\arg[P(i\omega)]$ es creciente entonces las raíces de $P^e(\omega)$ y $P^o(\omega)$ se van alternando. Además como el cambio neto en la fase es $n\pi$ entonces todas las raíces de $P^e(\omega)$ y $P^o(\omega)$ son reales. Por lo tanto $P(t)$ satisface la propiedad de la alternancia. Por lo tanto $P(t)$ es Hurwitz.

□

El Teorema de Leonhard-Mihailov y el Teorema de Hermite Biehler tienen el mismo significado. Podemos decir que el Teorema de Leonhard-Mihailov es la versión geométrica mientras que el Teorema de Hermite-Biehler la versión algebraica.

Capítulo 5

Test de estabilidad

En éste capítulo desarrollamos un procedimiento basado en el *Teorema de Hermite-Biehler* y en el *Teorema de la intersección de la frontera*, para determinar cuando un polinomio es Hurwitz. Este procedimiento consiste en determinar si un polinomio es Hurwitz, verificando si un polinomio de grado menor lo es. De ésta manera, aplicando el procedimiento un n'umero finito de veces, se verificará si un polinomio de grado pequeño es Hurwitz.

DEFINICIÓN 5.1. Dado el polinomio $P(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$, si $a_{n-1} \neq 0$, definimos

$$Q(t) = a_{n-1}t^{n-1} + \left(a_{n-2} - \frac{a_n}{a_{n-1}}a_{n-3}\right)t^{n-2} + a_{n-3}t^{n-3} + \\ + \left(a_{n-4} - \frac{a_n}{a_{n-1}}a_{n-5}\right)t^{n-4} + \ldots \tag{5.1}$$

TEOREMA 5.2. *Si $P(t)$ tiene todos sus coeficientes positivos, $P(t)$ es Hurwitz si y sólo si $Q(t)$ es Hurwitz.*

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow$): Supongamos que grado$(P(t)) = n = 2m$ (el caso $n = 2m+1$ es similar) y que $P(t)$ es Hurwitz. Por el teorema de Hermite-Biehler se tiene que

$$0 < \omega_{e,1} < \omega_{o,1} < \omega_{e,2} < \omega_{o,2} < \ldots < \omega_{e,m-1} < \omega_{o,m-1} < \omega_{e,m}$$

Luego:

$$\begin{aligned} Q(i\omega) &= \left[P^{par}(i\omega) - \frac{a_{2m}}{a_{2m-1}}\, i\omega P^{imp}(i\omega)\right] + P^{imp}(i\omega) \\ &= \left[P^{e}(\omega) + \frac{a_{2m}}{a_{2m-1}}\, \omega^2 P^{o}(\omega)\right] + i\omega P^{o}(\omega) \end{aligned}$$

Entonces

$$Q^o(\omega) = P^o(\omega), \quad Q^e(\omega) = P^e(\omega) + \frac{a_{2m}}{a_{2m-1}}\, \omega^2 P^o(\omega)$$

Por lo tanto $Q^o(\omega)$ tiene $m-1$ raíces reales que son las de $P^o(\omega)$:

$$\omega_{o,1},\ \omega_{o,3}, \ldots,\ \omega_{o,m-1}$$

Nótese que $Q^e(0) = P^e(0) = a_0 > 0$ pues todos los coeficientes de $P(t)$ son positivos. Luego

$$Q^e(\omega_{o,1}) = P^e(\omega_{o,1}) + \frac{a_{2m}}{a_{2m-1}}(\omega_{o,1})^2 P^o(\omega_{o,1}) = P^e(\omega_{o,1})$$

puesto que $\omega_{o,1}$ es una raíz de $P^o(\omega) = Q^o(\omega)$; además como $0 < \omega_{e,1} < \omega_{o,1} < \omega_{e,2}$ necesariamente $P^e(\omega_{o,1}) < 0$. Siguiendo el razonamiento anterior tenemos

$$\begin{aligned} Q^e(\omega_{o,2}) &= P^e(\omega_{o,2}) > 0 \\ Q^e(\omega_{o,3}) &= P^e(\omega_{o,3}) < 0 \\ &\vdots \\ Q^e(\omega_{o,m-2}) &= P^e(\omega_{o,m-2}) \text{ tiene el signo de } (-1)^{m-2} \\ Q^e(\omega_{o,m-1}) &= P^e(\omega_{o,m-1}) \text{ tiene el signo de } (-1)^{m-1} \end{aligned}$$

Por el teorema del valor intermedio se concluye que $Q(t)$ satisface la propiedad de la alternancia. Luego por el teorema de Hermite-Biehler, $Q(t)$ es Hurwitz.

$\Leftarrow$): Supongamos que $Q(t)$ es Hurwitz. Escribimos

$$P(t) = \left[Q^{par}(t) + \frac{a_{2m}}{a_{2m-1}}\, tQ^{imp}(t)\right] + Q^{imp}(t)$$

Similarmente se tiene que

$$P^o(\omega) = Q^o(\omega), \quad P^e(\omega) = Q^e(\omega) - \frac{a_{2m}}{a_{2m-1}}\,\omega^2 Q^o(\omega)$$

Como $Q(t)$ es Hurwitz entonces satisface la propiedad de la alternancia y como $P^o(\omega) = Q^o(\omega)$ entonces las raíces de $P^o(\omega)$ son reales. Utilizando un razonamiento similar al anterior y aplicando el teorema del valor intermedio se concluye que $P(t)$ satisface la propiedad de la alternancia. Por lo tanto $P(t)$ es Hurwitz.

□

El teorema anterior muestra como verificar si un polinomio $P(t)$ es Hurwitz por medio de la reducción sucesiva de su grado. Este resultado nos permite dar un algoritmo para verificar si un polinomio es o no Hurwitz.

ALGORITMO 1.

1) Hacer $P^{(0)}(t) = P(t)$.
2) Verificar que todos los coeficientes de $P^{(i)}(t)$ sean positivos.
3) Si el polinomio no satisface 2) detener el proceso y entonces $P(t)$ no es Hurwitz. En otro caso ir al paso 4).

4) Si grado $P^{(i)}(t) \leq 2$ entonces detener el proceso y por lo tanto $P(t)$ es Hurwitz. En otro caso construir $P^{(i+1)}(t) = Q(t)$ seg'un la ecuación (5.1) y regresar al paso 2).

OBSERVACIÓN 5.3. Es importante notar que para verificar si un polinomio es Hurwitz por medio del Test de Estabilidad, dicho polinomio debe satisfacer que todos sus coeficientes sean positivos.

A continuación mostraremos un par de ejemplos de cómo aplicar el algoritmo anterior.

EJEMPLO 5.4. Verifiquemos si el polinomio

$$p(x) = x^6 + x^5 + 2x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$$

es Hurwitz.
Solución. Hacemos

$$P^{(0)}(x) = x^6 + x^5 + 2x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$$

Ahora construimos $P^{(1)}(x) = Q(x)$ tomando

$$a_5 = 1,\ a_4 = 2,\ a_3 = 1,\ a_2 = 2,\ a_1 = 1,\ a_0 = 1$$

entonces

$$\begin{aligned} P^{(1)}(x) &= x^5 + (2 - 1(1))x^4 + x^3 + (2 - 1(1))x^2 + x + (1 - 1(0))x^0 \\ &= x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned} P^{(2)}(x) &= x^4 + (1 - 1(1))x^3 + x^2 + (1 - 1(1))x + 1 \\ &= x^4 + 2x^2 + 1 \end{aligned}$$

Observar que no todos los coeficientes de $P^{(2)}(x)$ son positivos, ya que los coeficientes de x^3 y x son cero. Entonces falla el paso 2) del algoritmo, por lo tanto $p(x)$ no es Hurwitz.

EJEMPLO 5.5. Verifiquemos si el polinomio

$$q(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$$

es Hurwitz.
Solución. Hacemos

$$P^{(0)}(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$$

Luego construimos $P^{(1)}(x)$:

$$\begin{aligned} P^{(1)}(x) &= 5x4 + \left(10 - \frac{1}{5}10\right)x^3 + 10x^2 + \left(5 - \frac{1}{5}1\right)x + 1 \\ &= 5x^4 + 8x^3 + 10x^2 + \frac{24}{5}x + 1 \end{aligned}$$

Los coeficientes de $P^{(1)}(x)$ son todos positivos cumpliéndose así el paso 2) del algoritmo, entonces construimos $P^{(2)}(x)$:

$$\begin{aligned} P^{(2)}(x) &= 8x^3 + \left(10 - \frac{5}{8}\left(\frac{24}{5}\right)\right)x^2 + \frac{24}{5}x + \left(1 - \frac{5}{8}\,0\right) \\ &= 8x^3 + 7x^2 + \frac{24}{5}x + 1 \end{aligned}$$

Vemos que $P^{(2)}(x)$ cumple el paso 2) del algoritmo, entonces construimos a continuación $P^{(3)}(x)$:

$$\begin{aligned} P^{(3)}(x) &= 7x^2 + \left(\frac{24}{5} - \frac{8}{7}(1)\right)x + 1 \\ &= 7x^2 + \frac{128}{75}x + 1 \end{aligned}$$

Como $P^{(3)}(x)$ es de grado 2 y todos sus coeficientes son positivos entonces, por el paso 4) del algoritmo, podemos concluir que $q(x)$ es Hurwitz [1].

[1] Aplicando el Corolario 2.9, puede verse que $P^{(3)}(x)$ es Hurwitz puesto que todos sus coeficientes son del mismo signo.

Capítulo 6

Criterio de estabilidad de Lienard-Chipart

Tomemos el polinomio con coeficientes reales

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_0 \qquad (a_0 > 0)$$

Si las desigualdades

$$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \ldots,\ \Delta_n > 0 \tag{6.1}$$

se satisfacen, entonces $f(z)$ es Hurwitz. Luego por el Teorema 2.6 todos los coeficientes de $f(z)$ son del mismo signo, en este caso:

$$a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ \ldots,\ a_n > 0 \tag{6.2}$$

Recordemos que el Teorema 2.6 es una condición necesaria pero no suficiente para que las raíces de $f(z)$ tengan parte real negativa. Resulta que en la investigación de criterios de estabilidad cuando las condiciones (6.2) se cumplen entonces las desigualdades (6.1) no son independientes entre sí. A saber, en este caso, la positividad de los menores principales diagonales Δ_i de orden par implica la positividad de los de orden impar y viceversa. Estas circunstancias fueron investigadas por los matemáticos franceses Liénard y Chipart en 1914 y establecieron un criterio de estabilidad distinto del Criterio de Routh-Hurwitz. Liénard y Chipart obtuvieron su criterio por medio una forma cuadrática especial.

TEOREMA 6.1 (Criterio de Liénard-Chipart). *Un polinomio real*

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_0 \qquad (a_0 > 0)$$

es estable (i.e. es Hurwitz) si y sólo si alguna de las siguientes condiciones se satisface:

(1) $a_n > 0, a_{n-2} > 0, \ldots;\ \Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \ldots.$
(2) $a_n > 0, a_{n-2} > 0, \ldots;\ \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \ldots.$
(3) $a_n > 0, a_{n-1} > 0, a_{n-3} \ldots;\ \Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \ldots.$
(4) $a_n > 0, a_{n-1} > 0, a_{n-3} \ldots;\ \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \ldots.$

Las condiciones 1), 2), 3) y 4) tienen una ventaja sobre el Criterio de Routh-Hurwitz, porque sólo deben verificarse aproximadamente la mitad de las desigualdades de los menores principales diagonales de la matriz de Hurwitz.

EJEMPLO 6.2. Verifiquemos si el polinomio $p(t) = t^5 + 10t^4 + 40t^3 + 80t^2 + 80t + 1$ es Hurwitz.
Solución. Construimos la matriz de Hurwitz de $p(t)$

$$p(t) = \begin{pmatrix} 10 & 80 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 40 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 80 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 40 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 80 & 1 \end{pmatrix}$$

Tomemos los coeficientes

$$a_5 = 1,\ a_3 = 80,\ a_1 = 10$$

todos son positivos, luego

$$\Delta_1 = 10 > 0$$

$$\Delta_3 = -10[800 - 1] + 80[400 - 80] = -7990 + 25600 > 0$$

$$\Delta_5 = 80\Delta_3 - \det \begin{pmatrix} 10 & 80 & 10 \\ 1 & 40 & 80 \\ 0 & 1 & 40 \end{pmatrix} = 80\Delta_3 - 12001 > 0$$

Por lo tanto, por la condición 1) del Criterio de Liénard-Chipart tenemos que $p(t)$ es Hurwitz. Obsérvese la ventaja de no tener que calcular los valores de los cinco menores principales $\Delta_1, \ldots, \Delta_5$ como sucede al utilizar el Criterio de Routh-Hurwitz.

Bibliografía

[1] Bhattacharyya, S. P., H. Chapellat and L. H. Keel. *Robust Control: The Parametric Approach*. Prentice-Hall. 1995.

[2] Gantmacher, F. R. *Matrix Theory (vol. I y II)*. AMS Chelsea Publishing. 1959.

[3] Hermite, C. *Sur le nombre des racines d´une équation algébrique comprise entre des limites donnés*. J. Reine Angew. Math., vol. 52, pp. 39-51. 1856.

[4] Hurwitz, A. *Über die Bedingungen,unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt*, Math. Ann., vol. 46 pp. 273-84. 1895.

[5] Kharitonov, V. L. *Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear diferential equations*. Diferential Uravnen, vol. 14, pp. 2086-2088. 1978. Translation in Differential Equations, vol. 14, pp. 1483-1485. 1979.

[6] Kostrikin, A. I. *Introducción al álgebra*. Editorial MIR. 1983.

[7] Lancaster, P. and Miron Tismenetsky. *The Theory of Matrices with applications*. Academic Press. 1985.

[8] Liapunov, A. M. *Problème gènéral de la stabilité du mouvment*. Annals of Mathematics Studies, vol. 17, pp. 203-469. Princeton University Press. 1949.

[9] Loredo, Carlos. *Criterios para determinar si un polinomio es polinomio Hurwitz.* Reporte de los seminarios de Investigación I y II. Universidad Autónoma Metropolitana. 2005.

[10] Marsden, J. E. y M. J. Hoffman. *Análisis básico de variable compleja*. Ed. Trillas. 2003.

[11] Merkin, D. R. *Introduction to the theory of stability*. Springer-Verlag. Text in Applied Mathematics num. 24. 1997.

[12] Routh, E. J. *A treatise on the stability of a given state of motion*. Macmillan, London. 1877.

[13] Uspensky, J. V. *Teoría de Ecuaciones*, Limusa. 1990.

[14] Zabcyk, J. *Mathematical Control Theory: an introduction*. Birkhäuser. 1995.